Olimpiada del día π

Con motivo de la celebración del día $\pi = 3.14\ldots$, la Asociación Nacional de Estudiantes de Matemáticas (ANEM) propone una serie de actividades, entre las que se encuentra esta Olimpiada. Para más información, consulten la página *www.anemat.com*.

Problema 1. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reales positivos. Probar que

$$\sum \frac{\alpha_i \alpha_{j+1}}{\alpha_{i+1}\alpha_j} \geq n^2,$$

donde la suma recorre los pares de enteros (i, j) con $1 \leq i, j \leq n$, y se entiende que $\alpha_{n+1} = \alpha_1$.

Problema 2. Supongamos que, dados $x_1, \ldots, x_n$ números reales, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} x_i > 0,\ \sum_{i<j} x_i x_j > 0,\ \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k > 0,\ \ldots\ ,\ x_i \cdots x_n > 0.$$

¿Qué conjunto de valores pueden tomar los x_i?

Problema 3. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n, y sea $f^{(i)}(x)$ su i-ésima derivada. Demostrar que, si $\gcd(f(x), f^{(i)}(x)) \neq 1$ para las derivadas desde $i = 1$ hasta $n-1$, entonces $f(x) = (x-a)^n$.

Nota: suponemos que estamos en un cuerpo de característica cero.

Problema 4. Hallar (razonadamente) el valor de la suma

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots .$$

Pueden enviar sus respuestas, junto con el equipo que las propone, a la dirección de correo electrónico *actividades@anemat.com* antes de las 23:59 del viernes 17 de marzo.